Optimización Cuántica Variacional de la Planificación Minera con Restricciones de Precedencia y Capacidad: Aplicación del Algoritmo VQE

Meylin Leonario-Marambio
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Computación
Universidad Católica del Norte
Antofagasta, Chile
meylin.leonario@alumnos.ucn.cl

Aldo Quelopana
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Computación
Universidad Católica del Norte
Antofagasta, Chile
aldo.quelopana@ucn.cl

***Abstract*— La optimización de planes mineros es un problema combinatorio de tipo NP-hard con alta relevancia práctica, que consiste en decidir qué bloques extraer de un yacimiento para maximizar el valor económico total, respetando restricciones de precedencia espacial y limitaciones de capacidad de la mina. Frente a las limitaciones de la computación clásica para abordar este tipo de problemas, este trabajo propone una reformulación del modelo como un problema de *Quadratic Unconstrained Binary Optimization* (QUBO), con el fin de ser resuelto mediante el algoritmo *Variational Quantum Eigensolver* (VQE). Si bien los resultados se limitan a instancias de pequeña escala, estos entregan evidencia preliminar de la efectividad del enfoque y su potencial para ser explorado en mayor profundidad en investigaciones futuras.**

Palabras claves — optimización cuántica, VQE, QUBO, planificación minera.

I. INTRODUCCIÓN

La planificación minera estratégica constituye uno de los pilares fundamentales para maximizar el beneficio de los proyectos mineros, determinando la secuencia óptima de extracción de bloques a lo largo de la vida útil de la mina [1]. La importancia económica de una buena planificación es sustancial, ya que mejoras en la eficiencia de extracción pueden traducirse en incrementos del valor actual neto del proyecto del orden del 10% al 25%, según documenta la literatura especializada [2][3].

En la minería a cielo abierto, esta planificación se traduce en decisiones críticas sobre qué bloques extraer, considerando restricciones geométricas de precedencia y limitaciones operativas de capacidad de la mina [4][5]. La naturaleza combinatoria del problema genera espacios de solución que crecen exponencialmente con el número de bloques. Por ejemplo, en el peor caso un modelo de n bloques y variables binarias (1 = extraer, 0 = no extraer) implica 2^n configuraciones posibles, incluso antes de considerar restricciones adicionales como la incertidumbre geológica [6]. Esta situación es propia de problemas NP-hard.

Estas características restringen la aplicabilidad de métodos exactos, motivando la exploración de enfoques alternativos capaces de abordar instancias de mayor escala y complejidad [7][8]. La práctica actual recurre ampliamente a metaheurísticas como *Particle Swarm Optimization* [9], *Simulated Annealing* [10], *Tabu Search* [11] y *Variable Neighborhood Descent* [12]. Estas técnicas permiten obtener soluciones razonables en tiempos aceptables, pero dependen fuertemente de la solución inicial desde la cual se parte y carecen de garantías de optimalidad global [13]. Estas limitaciones evidencian la necesidad de explorar nuevos enfoques capaces de manejar la complejidad estructural del problema.

En este contexto, la computación cuántica emerge como una tecnología prometedora, al aprovechar principios de la mecánica cuántica como superposición y entrelazamiento para explorar el espacio de soluciones [14]. Pese a que se encuentra en una etapa de maduración, se busca avanzar en el desarrollo de algoritmos que permitan estar preparados para la llegada de hardware cuántico más robusto [15].

Esta investigación forma parte de una línea preliminar y exploratoria, orientada a verificar la viabilidad de aplicar el algoritmo VQE en un problema de planificación con restricciones adicionales a las de precedencia, extendiendo así investigaciones como [16-17] y estableciendo una base para futuros estudios con mayor alcance.

II. METODOLOGÍA

A. Formulación clásica del problema

La selección de bloques que se abordará en el presente estudio, se formula como un problema de programación entera binaria.

Sean:

- n: número total de bloques
- v_i: valor económico neto del bloque i
- P_i: conjunto de bloques predecesores del bloque i
- x_i: variable binaria de decisión (xi = 1 si el bloque i es extraído, 0 en caso contrario)
- C: capacidad máxima de bloques a extraer

La formulación clásica busca:

$$\max Z = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \quad (1)$$

Sujeto a:

- Restricciones de precedencia:
$$x_i \leq x_j, \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in P_i \quad (2)$$

- Restricción de capacidad:
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq C \quad (3)$$

- Restricciones binarias:
$$x_i \in \{0,1\}, \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

Esta formulación garantiza que un bloque solo puede ser extraído si todos sus bloques predecesores han sido previamente minados, mientras se respeta la capacidad operativa y se maximiza el valor económico total.

A. *Reformulación QUBO*

Para aplicar algoritmos cuánticos variacionales, el problema debe reformularse como uno de minimización en el marco de un modelo QUBO [18]. Esta reformulación se logra mediante la incorporación de términos de penalización que representan las restricciones, integrándolas en la función objetivo. Como resultado, la función queda compuesta por tres términos:

$$\min f(x) = -\sum_{i=1}^{n} v_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j \in P_i} (1 - x_j) x_i + \beta \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - C\right)^2 \quad (5)$$

donde:

- El primer término es negativo con el fin de adaptar la función objetivo original a un problema de minimización.
- El segundo término introduce una penalización cuando se extrae el bloque i sin haber extraído previamente su predecesor j, incorporando así las restricciones de precedencia.
- El tercer término se modifica respecto de la formulación original, con el propósito de aproximar la solución a la capacidad operativa *C*. Esta modificación es posible, ya que la nueva formulación no genera soluciones infactibles.

III. ALGORITMO VQE

El algoritmo VQE es un enfoque híbrido cuántico-clásico diseñado para encontrar el estado base de un Hamiltoniano que representa la energía del sistema y que encapsula el problema de optimización. Su funcionamiento se basa en parametrizar un circuito cuántico (ansatz) que genera un estado candidato $|\psi(\vec{\theta})\rangle$. Este estado se evalúa a través de medidas de expectativa de energía, y un optimizador clásico ajusta iterativamente los parámetros del circuito con el objetivo de minimizar dicha energía. Este enfoque permite incorporar restricciones en la formulación del Hamiltoniano y aprovechar la mecánica cuántica para explorar configuraciones de manera paralela, lo que lo convierte en una alternativa prometedora frente a métodos clásicos [19] [20][21].

El Hamiltoniano es construido a partir de la formulación QUBO, utilizando la siguiente correspondencia:

$$x_i = \frac{1 - z_i}{2} \quad (6)$$

Donde z_i es el operador de Pauli-Z aplicado al qubit i.

Esta conversión permite representar cada término cuadrático binario del QUBO como una combinación lineal de operadores z y productos $z_i z_j$, formando así un Hamiltoniano que puede ser interpretado físicamente como un sistema de espines.

En este trabajo, el ansatz utilizado se construyó mediante compuertas de rotación R_y aplicadas individualmente a cada qubit, junto con compuertas de entrelazamiento CNOT basadas en las relaciones de precedencia entre bloques (Fig. 1). La elección de este diseño busca reflejar la estructura del problema y facilitar la exploración eficiente del espacio de soluciones.

Para la optimización de los parámetros del circuito, se empleó el algoritmo COBYLA como optimizador clásico, mientras que las expectativas de energía se estimaron utilizando un simulador cuántico.

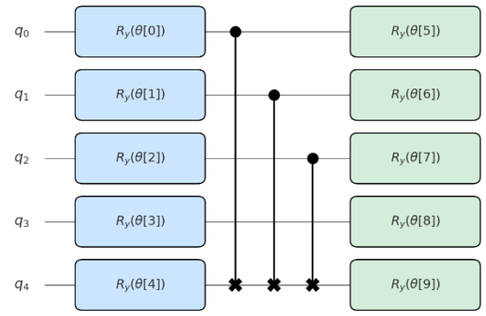


Fig. 1. Ejemplo de una capa del ansatz utilizado para abordar el problema de optimización.

IV. RESULTADOS PRELIMINARES

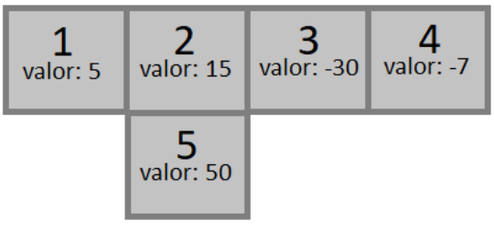


Fig. 2. Identificación y valores de los bloques que componen la instancia del problema.

El algoritmo VQE fue implementado utilizando la librería Qiskit de IBM aplicado a una instancia de 5 bloques con valores económicos variables y una relación de precedencia que requiere la extracción de los bloques 1, 2 y 3 antes que el bloque 5 (Fig 2).

Se probaron distintas capacidades máximas (*C*) variando desde 1 hasta 5 bloques. Las restricciones se penalizaron mediante los parámetros λ_4 y β, los cuales fueron calibrados a partir de los precios sombra obtenidos del problema dual. Esta estrategia permitió guiar la formulación cuántica hacia soluciones factibles y reducir la arbitrariedad en la selección de penalizaciones. Por ejemplo, para $C = 1$, $\lambda_4 = 25$ y $\beta = 15$, mientras que para $C = 5$ se fijaron en $\lambda_4 = 30$ y $\beta = 0$.

Para el ansatz se emplearon entre 4 y 5 capas de compuertas R_y con entrelazamiento basado en las precedencias, tal como se explicó anteriormente (Fig. 1). El entrenamiento de los parámetros se realizó utilizando COBYLA con un máximo de 300 iteraciones.

Se ejecutaron 4906 *shots* en el simulador, obteniéndose soluciones óptimas sin violar las restricciones. No obstante, las probabilidades de alcanzar dichos resultados fueron mayores en los casos en que el valor de C coincidía exactamente con el número de bloques que conformaban la solución óptima: $C = 1$ (bloque 1, valor total 15), $C = 2$ (bloques 1 y 2, valor total 20) y $C = 4$ (bloques 1, 2, 3 y 5, valor total 40), donde superaron el 80%. En contraste, para $C = 3$ (bloques 1 y 2, valor total 20) y $C = 5$ (bloques 1, 2, 3 y 5, valor total 40), las probabilidades se mantuvieron por debajo del 20%. Estos resultados fueron validados posteriormente utilizando el solver Gurobi.

V. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Este trabajo demuestra la viabilidad de aplicar VQE a problemas de optimización combinatoria en minería, evidenciando su capacidad para encontrar soluciones óptimas bajo restricciones y reforzando, de esta manera, su aplicación en la planificación minera.

La formulación QUBO, el Hamiltoniano y ansatz propuestos representan una base metodológica aplicable a otros problemas de optimización con restricciones. Pese a los desafíos de escalabilidad señalados en la literatura, los resultados obtenidos corroboran el potencial de los algoritmos cuánticos variacionales como complemento a los enfoques clásicos de optimización.

La convergencia hacia la solución óptima global sugiere que este enfoque podría ofrecer ventajas computacionales a medida que la tecnología cuántica madure y se disponga de dispositivos con un mayor número de qubits. No obstante, para incrementar las probabilidades de encontrar el óptimo en aquellos casos en que la capacidad C no coincida con el número de bloques que conforman la solución óptima, resulta necesario explorar ajustes en la formulación, incorporando, por ejemplo, variables de holgura en el tercer término de la Ecuación 5.

Como líneas adicionales de investigación, se propone aumentar la cantidad de bloques considerados e incorporar nuevas restricciones operativas, como las de tipo multiperíodo, con el fin de aproximar el modelo a escenarios más realistas y, al mismo tiempo, poner a prueba los límites actuales del algoritmo.

REFERENCES

[1] P. A. Á. Fuentes. “Metodología de gestión de información en el proceso de planificación minera de Codelco.” Memoria para optar al título de Ingeniero Civil de Minas, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Santiago, Chile, Feb. 2018, profesor guía: Nelson Gonzalo Ruminó Espiinoza; Miembros de la comisión: Jaime Henríquez Molina, Javier Cornejo González.

[2] K. Dagdelen and T. B. Johnson, “Optimum open pit mine production scheduling by lagrangian parameterization,” in Proceedings of the 19th Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM). Society of Mining Engineers of AIME, 1986, pp. 127–142.

[3] D. Bienstock and M. Zuckerberg, “Solving lp relaxations of large-scale precedence constrained problems,” in Integer Programming and Combinatorial Optimization, F. Eisenbrand and F. B. Shepherd, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010, pp. 1–14.

[4] A. M. Newman, E. Rubio, R. Caro, Á. Weintraub y K. Eurek, “A Review of Operations Research in Mine Planning,” *Interfaces*, vol. 40, no. 3, pp. 222–245, junio de 2010, doi: 10.1287/inte.1090.0492

[5] P. Darling, Ed., SME Mining Engineering Handbook, 3rd ed. Englewood, CO: Society for Mining, Metallurgy, and Exploration, 2011.

[6] T. Lagos, M. Armstrong, T. Homem-de-Mello, G. Lagos, y D. Sauré, “A framework for adaptive open-pit mining planning under geological uncertainty,” *Optimization and Engineering*, vol. 23, no. 1, pp. 111–146, Mar. 2022, doi: 10.1007/s11081-020-09557-0

[7] S. Ramazan, “Production scheduling with uncertain supply: A new solution to the open pit mining problem,” Optimization and Engineering, vol. 14, 06 2013.

[8] L. Skyttner, General Systems Theory – Ideas & Applications. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001.

[9] A. Khan, “Long-term production scheduling of open pit mines using particle swarm and bat algorithms under grade uncertainty,” *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, vol. 118, no. 4, pp. 361–368, Apr. 2018, doi: 10.17159/2411-9717/2018/v118n4a5

[10] Z. Levinson y R. Dimitrakopoulos, “Simultaneous stochastic optimisation of an open-pit gold mining complex with waste management,” *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*, vol. 34, no. 6, pp. 415–429, 2019, doi: 10.1080/17480930.2019.1621441

[11] R. Senécal y R. Dimitrakopoulos, “Long-term mine production scheduling with multiple processing destinations under mineral supply uncertainty, based on multi-neighbourhood tabu search,” *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*, vol. 34, no. 7, pp. 459–475, 2020, doi: 10.1080/17480930.2019.1595902

[12] A. Quelopana Retamal and A. Navarra, “Incorporating operational modes into long-term open-pit mine planning under geological uncertainty: An optimization combining variable neighborhood descent with linear programming,” Mining, Metallurgy & Exploration, vol. 41, 08 2024.

[13] M. Sarhani, S. Voß y R. Jovanovic, “Initialization of metaheuristics: comprehensive review, critical analysis, and research directions,” *International Transactions in Operational Research*, 13 de diciembre de 2022, doi: 10.1111/itor.13237

[14] G. Benenti, G. Casati, D. Rossini, and G. Strini, *Principles of Quantum Computation and Information*. Singapore: World Scientific, 2018, doi: 10.1142/10909.

[15] F. Albarrán, P. Assmann, A. Delgado, D. Goyeneche, C. H. Avigliano, S. Torres, C. Torres, and S. Walborn, *Recomendaciones y desafíos para el fortalecimiento del ecosistema cuántico en Chile*, no. 1. Comisión Asesora de Tecnologías Cuánticas, Ministerio de Ciencia, Tecnología, Conocimiento e Innovación, Chile, Sep. 5, 2024.

[16] Y. Hindy, J. Pointing, M. Tolunay, S. Venkatarao, M. Motta, and J. A. Latone, A quantum computational approach to the open-pit mining problem, arXiv preprint arXiv:2107.11345, 2021. [En línea]. Disponible en: https://arxiv.org/abs/2107.11345

[17] G. Paradezhenko, A. Pervishko, and D. Yudin, “Quantum-assisted open-pit optimization,” JETP Lett., vol. 119, no. 6, pp. 470–478, 2024, doi: 10.1134/S0021364023604256.

[18] F. Glover, G. Kochenberger, R. Hennig y Y. Du, “Quantum bridge analytics I: a tutorial on formulating and using QUBO models,” *Annals of Operations Research*, vol. 314, no. 1, pp. 141–183, jul. 2022, doi: 10.1007/s10479-022-04634-2

[19] J. Tilly, H. Chen, S. Cao, D. Picozzi, K. Setia, Y. Li, E. Grant, L. Wossnig, I. Rungger, G. H. Booth y J. Tennyson, “The Variational Quantum Eigensolver: a review of methods and best practices,” *Physics Reports*, vol. 986, pp. 1–128, 2022, doi: 10.1016/j.physrep.2022.01.001

[20] A. Peruzzo, J. McClean, P. Shadbolt, M.-H. Yung y X.-Q. Zhou, “A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor,” *Nature Communications*, vol. 5, art. 4213, 2014, doi: 10.1038/ncomms5213

[21] J. R. McClean, J. Romero, R. Babbush y A. Aspuru-Guzik, “The theory of variational hybrid quantum-classical algorithms,” *New Journal of Physics*, vol. 18, no. 2, feb. 2016, doi: 10.1088/1367-2630/18/2/023023